数理解析研究所講究録
979 巻 1997 年 99-103

THE NUMERICAL RADIUS OF AN INFINITE DIRECTED REGULAR GRAPH

東北大学 情報科学研究科 高村正樹
宮城教育大学 武元英夫

$G=(V,E)$ を，無限有向グラフとする。ここで，V は点集合，E は弧集合を表す。弧 $e=(u,v)\in E$ に対し, u を e の始点，v を e の終点と呼ぶ。さらに，v を終点としてもつ弧の個数を入次数と呼び $d^-(v)$ で表し，v を始点としてもつ弧の個数を出次数と呼び $d^+(v)$ で表す。すべての点に対して，入次数も出次数も有界であるとき，G は bounded valency を持つという。

有限グラフの研究において，隣接行列の性質を調べることは有効な手段であるが，無限グラフにおいては，無向グラフの隣接作用素が Mohar [4] によって導入された。さらに，藤井等 [3] によって有向グラフの場合に拡張された。

$e_v(u)=\delta_{v,u}$ によって定義された $\{e_v\ ;\ v\in V\}$ を標準基とするヒルベルト空間 $H=\ell^2(V)$ において，$G=(V,E)$ に関連した閉作用素 $A=A(G)$ を次のように定義する；

$$\mathrm{Dom}(A)=\left\{x=\sum_{v\in V}x_ve_v\in H\ ;\ \sum_{u\in V}|\sum_{v\in D^-(u)}x_v|^2<+\infty\right\}$$

として，

$$Ax=\sum_{u\in V}\sum_{v\in D^-(u)}x_ve_u.$$

ここで $D^-(u)$ は，u を終点とする弧の，始点全体の集合である。この作用素 $A=A(G)$ を G の隣接作用素と呼ぶ。隣接作用素 $A(G)$ は，G が bounded valency を持つならば有界である。

以下，無限有向グラフ G は bounded valency を持ち，多重弧は持たないものとする。グラフ G のスペクトルを 隣接作用素 $A(G)$ のスペクトルによって定義し，$\sigma(G)$ で表す。更にスペクトル半径 $r(G)$ 及び，数域半径 $w(G)$ をそれぞれ

$$r(G)=\sup\{\,|\lambda|\ ;\ \lambda\in\sigma(G)\},\quad w(G)=\sup\{\,|\langle A(G)x,x\rangle|\ ;\ ||x||=1,x\in H\}$$

によって定義する。このとき，次の関係が成り立つ。

$$r(G)\leqq w(G)\leqq ||A(G)||\leqq\sqrt{d^+\cdot d^-}$$

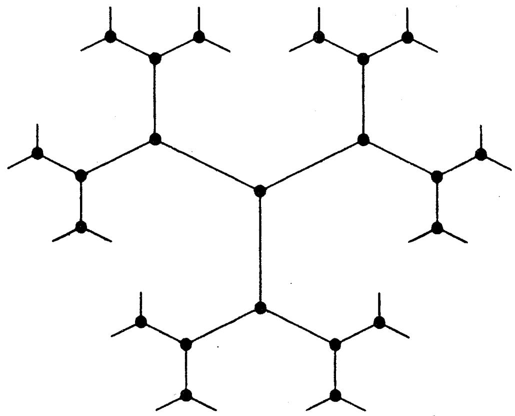
ここで，$d^{+}=\max_{v\in V} d^{+}(v)$，$d^{-}=\max_{v\in V} d^{-}(v)$ である。特に G が無向グラフの場合は，隣接作用素 $A(G)$ は自己共役作用素であるから，d をグラフ G の最大次数とするとき，

$$r(G)=w(G)=\|A(G)\|\leqq d$$

が成り立つ。

グラフのすべての入次数と出次数が等しく，その数が k であるとき，k-正則グラフと呼ぶ。グラフ G が有限グラフである場合，k-正則ならば $r(G)=k$ が成り立つ。しかし，無限グラフにおいては，一般には成り立たない。

例 1 ([5]). 無限グラフ $G=T_3$ (homogeneous tree);



この場合，グラフ G は 3-正則グラフであるが，$r(G)=2\sqrt{2}$ となる。

これに対して，Biggs 等 [1] は無向グラフの等周数を導入し，k-正則な無限無向グラフ G に対して，等周数が 0 であることと，$r(G)=k$ であることが同値であることを示した。さらに有向グラフにおいて，藤井等 [2] は等周数を導入し，k-正則な有向グラフ G の等周数が 0 ならば 隣接作用素 $A(G)$ は normaloid であり，$r(G)=k$ が成り立つことを示した。

以下，$G=(V,E)$ は無限有向グラフとする。

定義 2([2]). グラフ $G=(V,E)$ の点集合 V の有限部分集合 X に対し，X から $V\setminus X$ への弧集合を $\partial^{+}X$ で表し，また $V\setminus X$ から X への弧集合を $\partial^{-}X$ で表す。さらに，

$$i^{\pm}(G)=\inf\left\{\frac{|\partial^{\pm}X|}{|X|}\ ;\ X \text{ は } V \text{ の有限部分集合}\right\}$$

として，

$$i(G) = \max\{\ i^+(G),\ i^-(G)\}$$

なる正数 $i(G)$ を G の等周数と呼ぶ。ここで，$|\cdot|$ は，集合の濃度を表す。

定理 3([2]). k-正則グラフ $G=(V,E)$ に対し，$i(G)=0$ ならば，隣接作用素 $A(G)$ は normaloid であり，$r(G)=k$ となる。

ここでは，藤井等によるものとは異なる形で等周数 $i_0(G)$ を定義し，$i_0(G)=0$ であることと，$r(G)=w(G)=||A(G)||=k$ であることが同値であることを述べる。

定義 4. グラフ $G=(V,E)$ に対し，

$$i_0(G) = \inf\left\{\frac{|\partial^+X|+|\partial^-X|}{2|X|}\ ;\ X \text{ は } V \text{ の有限部分集合}\right\}$$

なる正数 $i_0(G)$ を G の等周数と呼ぶ。

注意 5. 無向グラフ $G=(V,E)$ に対しては，任意の $uv \in E$ に対し，$(u,v)\in E$ かつ $(v,u)\in E$ と向きづけることにより，$i(G)$ も $i_0(G)$ も，ともに [1] において導入された無向グラフにおける等周数と一致する。

グラフ $G=(V,E)$ と，$x \in \ell^2(V)$ に対し，次のように $\Delta(x)$ を定義する。

$$\Delta(x) = \sum_{(u,v)\in E} |x_u^2 - x_v^2|.$$

更に，点集合 V の有限部分集合 X と，$x=\{x_v\}\in \ell^2(X)$ に対し，$v\in X$ならば $\tilde{x}_v = x_v$ ，$v \in V\setminus X$ ならば $\tilde{x}_v=0$ として，$\tilde{x}=\{\tilde{x}_v\}\in\ell^2(V)$ を表す。

補題 6. グラフ $G=(V,E)$ の点集合 V の任意の有限部分集合 X と，成分がすべて実数である $x\in\ell^2(X)$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\Delta(\tilde{x}) \geqq 2i_0(G)||\tilde{x}||^2.$$

この補題を用いることにより，次の不等式が示せる。

定理 7. k-正則グラフ G に対し，次の不等式が成り立つ。

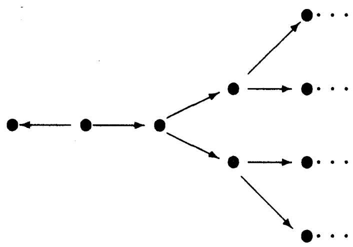
$$\frac{(i_0(G))^2}{2k} \leqq k - w(G) \leqq i_0(G)$$

このことより，直ちに次の結果を得る。

定理 8.
k-正則グラフ $G=(V,E)$ に対し，$i_0(G)=0$ ならば，隣接作用素 $A(G)$ は normaloid であり，$r(G)=k$ となる。つまり，$k=r(G)=w(G)=||A(G)||$ が成り立つ。逆に，$w(G)=k$ ならば $i_0(G)=0$ である。この場合，$r(G)=w(G)=||A(G)||=k$ も成り立つ。

これで，次数 k の正則グラフ G に対しては，$i_0(G)=0$ であることと $r(G)=w(G)=||A(G)||=k$ であることが同値であることがわかった。次に，２つの等周数 $i(G)$ と $i_0(G)$ との関係について述べる。
それぞれの定義から，明らかに $i(G)\leqq 2i_0(G)$ が成り立つので，一般に $i_0(G)=0$ ならば $i(G)=0$ が成り立つが，逆は成り立たない。

例 9.　以下のグラフを G とする。



この場合，$i(G)=0$ であるが，$i_0(G)=\dfrac{1}{2}$ となる。

しかし，グラフ $G=(V,E)$ が k-正則グラフの場合は，定理 3 より，$i(G)=0$ ならば $r(G)=w(G)=||A(G)||=k$ が成り立つので，定理 8 より $i_0(G)=0$ となる。つまり，正則グラフ G に対しては，$i(G)=0$ であることと $i_0(G)=0$ であることは同値となる。さらに，瀬尾 [6] によって導入された elementary ratio も，深く関連する。

定義 10.([6])　グラフ $G=(V,E)$ に対して，

$$\epsilon(G)=\sup\left\{\frac{|E(X)|}{|X|}\ ;\ G'=(X,E(X))\text{ は }G\text{ の有限誘導部分グラフ}\right\}$$

を G の elementary ratio と呼ぶ。

定理 11.([6])　k-正則グラフ G に対して，次のことが成り立つ。

(1) $i(G)=0$ ならば $\epsilon(G)=k$ である。

(2) $\epsilon(G)=k$ ならば，隣接作用素 $A(G)$ は normaloid であり $r(G)=k$ が成り立つ。

以上のことから，定理 8 と定理 11 をまとめて，次の結果を得る。

定理 12. k-正則な無限有向グラフ $G=(V,E)$ に対して，次の 4 つの命題は同値である。

(1) $r(G)=w(G)=||A(G)||=k$ である。

(2) $i(G)=0$ である。

(3) $i_0(G)=0$ である。

(4) $\epsilon(G)=k$ である。

参考文献

[1] N. L. Biggs, B. Mohar and J. Shawe-Taylor, *The spectral radius of infinite graphs*, Bull. London Math. Soc., **20** (1988), 116-120.

[2] J.I. Fujii, M. Fujii, H. Sasaoka and Y. Watatani, *The Spectrum of an infinite directed graph*, Math. Japonica, **36** (1991), 607-625.

[3] M. Fujii, H. Sasaoka and Y. Watatani, *Adjacency operators of infinite directed graphs*, Math. Japonica, **34** (1989), 727-735.

[4] B. Mohar, *The spectrum of an infinite graph*, Linear Algebra Appl. **48** (1982), 245-256.

[5] B. Mohar and W. Woess, *A survey on spectra of infinite graphs*, Bull. London Math. Soc., **21** (1989), 209-234.

[6] Y. Seo, *The spectral radius of an infinite directed graph*, Math, Japonica, **39** (1994), 373-379.